Dossier n°24 : Exemples de recherches et de représentations de sections planes de solides usuels.

Rédigé par Cécile COURTOIS, le 16 mai 2004
cecile-courtois@wanadoo.fr

I Situation par rapport aux programmes.

L'étude des solides usuels commence en Sixième avec la représentation en perspective cavalière et par le patron d'un parallélépipède rectangle.

Ce travail se poursuit en cinquième et en quatrième avec les prismes, les cylindres, les pyramides et les cônes.

En troisième, on introduit les sphères et on commence la recherche et la représentation des sections planes de solides dans des cas simples (plans parallèles à une face, une arête, un axe, etc.).

Ce travail est repris en Seconde et approfondi en Première S avec le sections planes de cubes et de tétraèdre.

Je choisis donc de situer ce dossier en Troisième et en Première S.

II Commentaires généraux.

II.1 A propos du sujet.

Comme je l'ai expliqué précédemment, les élèves sont familiarisés avec la géométrie dans l'espace tout au long de leur scolarité.

Une fois établies les différentes propriétés des solides usuels (définition, volume, aire latérale), on peut être amené dans certaines situations, à « partager » ces solides (fabrication d'un objet par exemple) et il est dans ce cas souvent utile de connaître la « forme » de cette section et plus particulièrement de savoir la représenter.

En effet, la géométrie dans l'espace conduit inévitablement à des problèmes de visualisation lors de la représentation sur une feuille (donc dans un plan).

L'objectif de ce dossier est donc de présenter différentes méthodes de recherche et de représentations de sections planes de solides usuels.

II.2 A propos des exercices.

J'ai donc choisi, pour illustrer ce dossier, de vous présenter quatre exercices illustrant différentes méthodes de recherche et de représentations de sections planes de divers solides usuels :

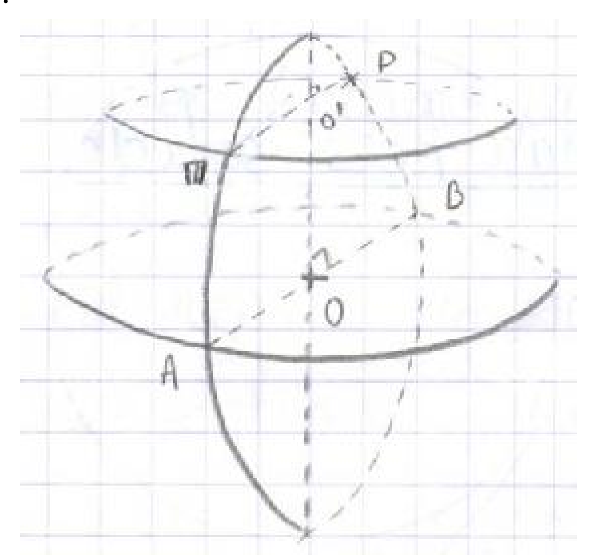
- l'exercice n°1 propose la recherche de la section d'une sphère en troisième ;
- l'exercice n°2 propose la recherche de la section d'un cube en Première S ;
- l'exercice n°3 propose la recherche de la section d'un tétraèdre inscrit dans une pyramide régulière en première S ;
- l'exercice n°4 propose la recherche de la section d'un tétraèdre régulier en Première S.

J'expliciterai les méthodes employées dans la présentation détaillée des exercices.

Notons qu'on pourra, à l'occasion de ce sujet, proposer aux élèves une activité à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Par exemple, on peut proposer la recherche de telles sections en classe de Seconde avec le logiciel Interesp.

III Présentation des exercices.

III.1 Exercice n°1.



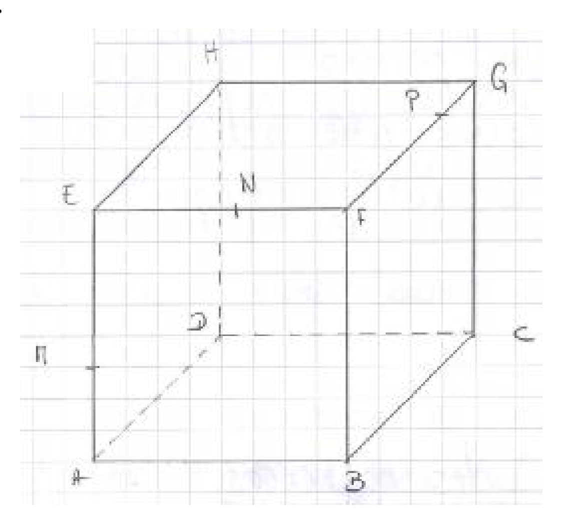
But : Dessiner en vraie grandeur la section de la sphère par un plan passant par O, A et M.

Méthode : Déterminer la nature de la section.

Outils :

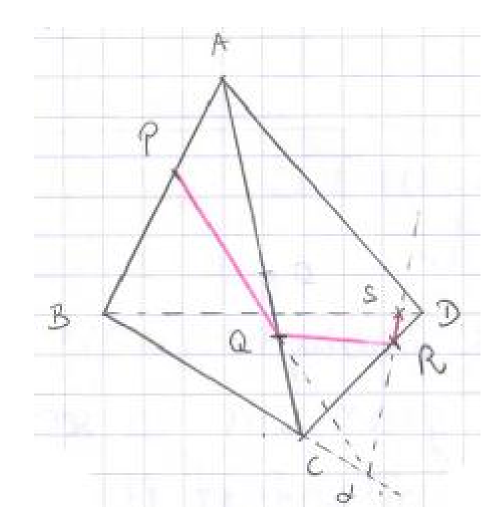
- *Théorème 1 :*
  La section d'une sphère par un plan est un cercle ou un point.

III.2 Exercice n°2.



But : Déterminer la section d'un cube par le plan (MNP).

Méthode : Technique du tracé hors-solide.



On souhaite déterminer la section du tétraèdre ABCD par le plan (PQR).

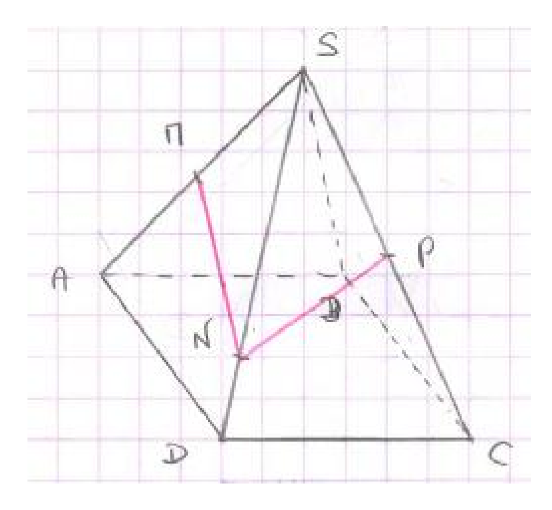
- Les droites (PQ) et (BC) sont dans le plan (ABC). Lorsqu'elles sont sécantes, on peut représenter leur point d'intersection α à condition de prolonger les tracés en dehors du tétraèdre.
- On dispose alors de deux points du plan (PQR) dans le plan (BCD) : les points α et R. Des deux plans se coupent donc suivant la droite (αR) ce qui permet de contruire le point S et d'achever le tracé de la section.

Outils :

- *Théorème 2 :*

  Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et les droits d'intersection sont parallèles.

III.3 Exercice n°3.



But : Déterminer et représenter en vraie grandeur la section de SABC avec $\mathcal{P}$ = (MNP).

Méthode :

1) Représentation en perspective cavalière par la technique du tracé hors-solide.
2) Calcul de longueurs.
3) Tracé du patron.
4) Méthode de triangulation :

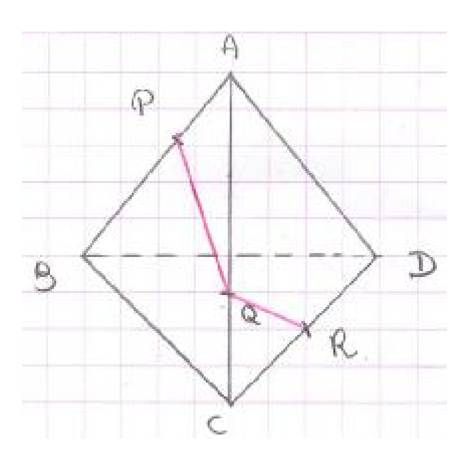
   Pour représenter un segment en vraie grandeur, on le considère « élément » d'un triangle qu'on sait représenter.

Outils :

- Triangles isométriques ;

- Théorème de Thalès.

III.4 Exercice n°4



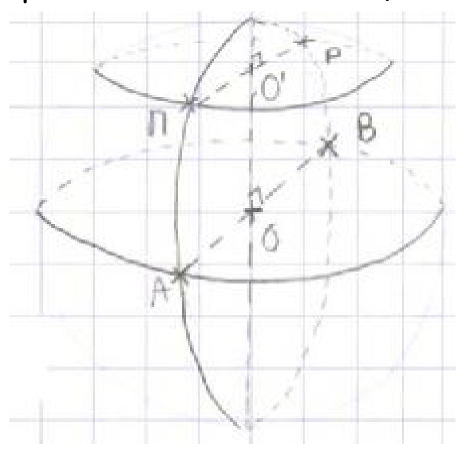
But : Déterminer et représenter en vraie grandeur la section du tétraèdre par le plan (PQR).

Méthode :

1) Représentation en perspective cavalière (hors-solide).
2) Tracé du patron
3) Tracé de [PR] en vraie grandeur par triangulation
4) Tracé en vraie grandeur de la section.

IV Enoncés et références des exercices.

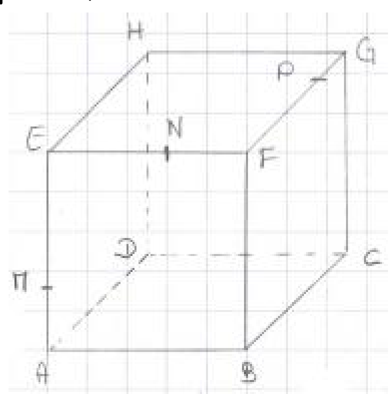
IV.1 Exercice n°1 (n°46 p 269, Bordas 3ème 1999).



On donne OA = 2,5 cm et O'M = 0,7 cm.

1) Dessiner en vraie grandeur la section de la sphère représentée ci-dessus, de centre O, par un plan passant par O, A et M.
2) Placer les points O, A, O', M, B et P.

IV.2 Exercice n°2 (n°58 p 321, Transmath 1ère S 2001).



ABCDEFGH est un cube. M est un point de l'arête [AE], N de [EF] et P de [FG] comme l'indique la figure ci-dessus. On cherche la section du cube par le plan (MNP).

1) Déterminer la face du cube dont l'intersection avec (MNP) est parallèle à (MN) puis à (NP).
2) a) Soit Q le point d'intersection de (PN) et (HG). Vérifier que Q appartient à la fois à (MNP) et à (CDHG).
   b) Tracer la parallèle à (MN) passant par Q. Elle coupe (CG) en R et (DC) en S. Déterminer l'éventuelle intersection de (MNP) avec (CDHG).
3) a) Pourquoi la parallèle à (NP) passant par S permet-elle de déterminer l'intersection du plan (MNP) et de la face (ABCD) ? Elle coupe (AB) en T.
   b) Quelles sont les intersections du plan (MNP) avec les faces (BCGF) et (ADEG) ?

IV.3 Exercice n°3 (n°37 p 189, Terracher 1ère S 2001).

La pyramide SABCD est régulière, de sommet S et de base le rectangle ABCD avec BC = AD = 2 et SA = SB = SC = SD = AB = CD = 4. Les points M et P sont les milieux de [SA] et [SC] et N est le point de [SD] tel que DN = 1.

Il s'agit ici de représenter en vraie grandeur la section du tétraèdre SABC par le plan P = (MNP).

1) Effectuer une représentation en perspective cavalière (on notera T, U, V, W et Q les points d'intersection de P avec (AB), (AD), (DC), (BC) et (SB)).

2) Montrer que DU = 1, DV = 2 et en déduire que AT = 6 et CW = 3.

3) A l'aide d'un patron des faces (SAB) et (SBC), représenter [PQ] puis [QM] en vraie grandeur. En déduire le triangle MPQ en vraie grandeur.

IV.4 Exercice n°4 (n°43 p 191, Terracher 1ère S 2001).

On considère un tétraèdre régulier d'arête égale à 3 et les points P, Q et R définis par :

- P $\in$ [AB] et AP = 1 ;
- Q $\in$ [AC] et CQ = 1 ;
- R est le milieu de [CD]

On désigne par P le plan (PQR).

A) Représenter en perspective cavalière la section du tétraèdre par le plan P. Par la suite, on désigne par S le point d'intersection de (BD) avec P.

B) On rabat les faces du tétraèdre dans le plan (BCD) extérieurement au triangle BCD. On désigne par :

- A_1, P_1, Q_1 les images de A, P et Q dans le rabattement de la face (ABC) ;
- A_2 et P_2 les images de A et P dans le rabattement de la face (ABD) ;
- A_3 et Q_3 les images de A et Q dans le rabattement de la face (ACD) ;

1) Réaliser la figure décrite ci-dessus et montrer que le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral avec B, C et D comme milieux des côtés.

2) Construire le point S et en déduire quels segments sur le patron su tétraèdre représentent en vraie grandeur les côtés du quadrilatèe PQRS.

C) Représenter en vraie grandeur le triangle ABR. En déduire [PR] en vraie grandeur.

D) Représenter PQRS en vraie grandeur.

V Commentaires.

Après avoir enseigné une année en seconde, je pense qu'il est possible de trouver dans les manuels de seconde des exercices pour ce dossier.